Nyugdíjcélú életjáradékok élettartam-kockázata az általánosított korcsoport-időszak-kohorsz modellkeretben

Vékás Péter,

a Budapesti Corvinus Egyetem tanársegédje, az MTA-BCE „Lendület” Stratégiai Interakciók Kutatócsoport tudományos segédmunkatársa

E-mail: peter.vekas@uni-corvinus.hu

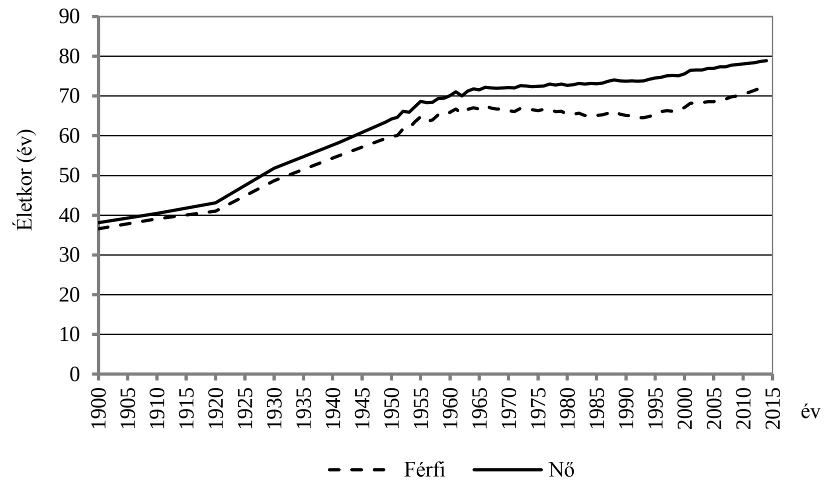
A szerző a halandóság statisztikai előrejelzésére alkalmazható egyre népszerűbb eljárásokat Magyarországon elsőként egységes tárgyalásban, az általánosított korcsoport-időszak-kohorsz modellcsalád, mint új paradigma keretében mutatja be. Empirikus elemzés során öt nevezetes modellt illeszt a hazai 65 éves és idősebb egyének 1975–2014. naptári évekbeli halandósági adataira, és a mintán kívüli előrejelzési pontosság kritériuma alapján az időskori halandóság modellezésére széleskörűen alkalmazott Cairns–Blake–Dowd-modellt választja. Az illesztett modell segítségével, *Májer–Kovács* [2011] cikke nyomán, a nyugdíjkorhatáron várható hátralevő élettartam és a nyugdíjcélú életjáradékok egyszeri nettó díjának becslését végzi el. A kérdés aktualitását az önkéntes nyugdíjpénztári járadékszolgáltatásra vonatkozó szabályok friss változásai adják, amelyek felértékelik a halandóság-előrejelző módszertan szerepét. A szerző nagy hangsúlyt fektet a paraméterbizonytalanság megfelelő modellezésére. Az elvégzett számítások alapján megállapítja, hogy a közelmúltban az élettartam-kockázat szerepe jelentősen felértékelődött. Célja, hogy eredményeit a tudományos kutatók, statisztikai és társadalombiztosítási szakemberek és gyakorló aktuáriusok egyaránt eredményesen használhassák fel a jövőben az olyan modellek készítése során, amelyekben lényeges az élettartam-kockázat módszertani szempontból megfelelő figyelembe vétele.

TÁRGYSZÓ:
Várható élettartam.
Nyugdíjmodellezés.
Ökonometriai modell.

DOI: 10.20311/stat2017.02.hu0139

Empirikus tény, hogy az emberi élettartam átlagos hossza a XX. század folyamán a világ legtöbb részén rendkívül gyorsan, többnyire rövid időtávon is érzékelhető módon növekedett. A jelenség szemléltetése kedvéért az 1. ábrán látható a magyarországi nemenkénti születéskor várható élettartamok alakulása 1900 és 2014 között. Az ábra alapján megállapítható, hogy a születéskor várható élettartam Magyarországon mind a férfiak, mind a nők esetén közel kétszeresére emelkedett az utóbbi valamivel több mint egy évszázadban. Bár a halandóság csökkenése jellemzően nem a járadékszolgáltatók számára kiemelten fontos nyugdíjas korosztályban volt a legerőteljesebb, mégis ebben a csoportban is – kisebb-nagyobb rövid távú ingadozásoktól eltekintve – már régóta a várható hátralévő élettartam emelkedése figyelhető meg.

1. ábra. A magyarországi születéskor várható élettartamok nemenként, 1900–2014



Forrás: Saját szerkesztés a KSH adatai alapján.

Egyértelműen kedvező és örvendetes jellege ellenére e folyamat jelentős módszertani és pénzügyi nehézségek elé állítja a nyugdíj- és életbiztosítási területen működő vállalatokat és intézményeket, melyek pénzáramlásainak előrejelzése során az aktuáriusi szakma hagyományosan az egy bizonyos naptári évre vonatkozó halandósági táblákra támaszkodik, feltételezve, hogy az abban szereplő koréves halálozási valószínűségek a jövőben változatlanok maradnak. Ezzel szemben a valóságban az életjáradékok tulajdonosai a halandóság csökkenése következtében a kalkuláltnál nagyobb valószínűséggel érik meg a járadékfizetési időpontokat, ami jelentős, előre nem kalkulált többletkifizetést jelent a járadékszolgáltatóknak.

Így az időben változatlan halandóság feltételezése mellett a felosztó-kirovó elven működő állami nyugdíjrendszerek, a nyugdíjpénztárak és a járadéktermékeket értékesítő életbiztosítók egy adott pillanatban csupán meglehetősen pontatlanul jelezhetik előre jövőbeli bevételeiket, valamint kiadásaikat, és komoly tervezési hibát követnek el, melynek eredményeképpen jelentős veszteségre számíthatnak a jövőben. Az angol nyelvű szakirodalomban a probléma „longevity risk” néven ismert, egy lehetséges és általam preferált magyar nyelvű elnevezése pedig a *Májer–Kovács* [2011] cikkében bevezetett „élettartam-kockázat”.

Az élettartam-kockázat figyelembevétele és mérése szükségessé teszi a kifinomult, modern halandóság-előrejelző módszerek alkalmazását. A jelenség hatását előrejelzésen alapuló, dinamikus halandósági táblák segítségével lehet beépíteni a díjkalkulációkba.

Aktuáriusi számításokban betöltött szerepe mellett az élettartam-kockázat aktualitását az adja, hogy 2016. január 1-jétől, a Szolvencia II EU keretirányelv (*Official Journal of the European Union* [2009]) előírásainak gyakorlati hatályba lépésétől immár hatályos jogszabály is rendelkezik annak modellezéséről és kiemelt kezeléséről. A probléma aktualitását tovább növeli az önkéntes nyugdíjpénztári életjáradékokra vonatkozó szabályok módosítása (*Magyar Közlöny* [2015b]). A korábbi szabályozás súlyos hiányossága volt, hogy a nyugdíjkorhatár betöltésekor a pénztárak nem voltak kötelesek a felhalmozott vagyon ellenében életjáradékot szolgáltatni a pénztártagok részére, még az ügyfél kifejezett kérésére sem. Így a pénztártagok nyugdíjas éveik biztosítására csupán banktechnikai járadékot igényelhettek. E konstrukció keretében a pénztártagok vagy örököseik egy határozott tartam erejéig részesültek rendszeres járadékban. A banktechnikai járadék valójában nyugdíjcélra teljességgel alkalmatlan, mivel egyrészt a határozott tartam letelte után az ügyfelek anyagi biztonságát már nem garantálja, másrészt szolgáltatása a tartam végéig a pénztártag esetleges halála esetén is fennmarad, melynek következtében díja jóval magasabb annál, mint amit a nyugdíjcélú felhasználás indokolna.

Ezt a helyzetet orvosolja a 2015 decemberében elfogadott új pénztári szabályozás, melynek értelmében a legalább ezer tagot számláló önkéntes nyugdíjpénztárak – az ügyfelek erre vonatkozó nyilatkozata esetén, a felhalmozott pénztári vagyonért cserébe – a nyugdíjkorhatár betöltésétől kezdve kötelesek valamely életbiztosító társaságnál életjáradékot vásárolni a tagok részére. Az életjáradék a banktechnikai járadékkal ellentétben a tulajdonosa élete végéig biztosít rendszeres kifizetéseket. Az intézkedés új lendületet adhat az életjáradékok pangó hazai piacának.[1] Ezzel párhu-

[1] E termékek 2014. évi összes hazai díjbevétele csupán 3 milliárd 155 millió Ft volt (*MABISZ* [2015]).

zamosan várhatóan előtérbe kerül az – életjáradékok esetén kiemelt jelentőségű – élettartam-kockázat problémája.

Fontosnak tartom megemlíteni, hogy bár az életjáradékok a banktechnikai járadékoknál kétségtelenül alkalmasabbak az időskori anyagi biztonság megteremtésére, alkalmazásuk felveti az antiszelekció problémáját: mivel az átlagosnál jobb életkilátásokkal rendelkező ügyfelek (például a nők és olyan egyének, akiknek szülei hosszú életnek örvendhetnek) számára várhatóan a többieknél kedvezőbb a szerződés megkötése, ezért ezek a csoportok általában az országosnál magasabb arányban vannak jelen a biztosítotti állományokban. Az antiszelekcióval járó problémákat növeli az Európai Unió nemek szerinti megkülönböztetést tiltó irányelve (*Official Journal of the European Union* [2004]). A problémára a járadékosokra vonatkozó speciális halandósági táblák (*Banyár* [2012]) alkalmazása jelenthet megoldást, ami ugyanakkor a néphalandósági táblák használatához képest jelentősen növelheti a járadékbiztosítások díját.

1. Szakirodalmi áttekintés és az elemzés célja

Ebben a fejezetben a halandóság-előrejelző modellek szakirodalmi hátterét és a tanulmányomban ismertetendő empirikus elemzés célját mutatom be.

1.1. Halandóság-előrejelző módszerek

A jelenleg elfogadott statisztikai halandóság-előrejelző módszertan kialakulása *Lee–Carter* [1992] cikkének megjelenésétől számítható, amelyben a szerzők az életkorfüggő halandósági rátákra egy viszonylag egyszerű, naptári időszaktól és életkortól függő paraméterekkel rendelkező log-bilineáris modell illesztését javasolják. A modell egyenletei meglepően jól írják le az Egyesült Államok 1900–1989. évi életkorfüggő halandósági rátáinak alakulását. A szerzők a paraméterek becslését követően a pontosság érdekében a naptári évtől függő paraméterek (az ún. mortalitási index) újrabecslését javasolják, előírva a modell alapján várt és a ténylegesen megfigyelt halálesetek számainak egyezését az egyes naptári években. Az újrabecsült mortalitási index idősorát ARIMA[2] (autoregressive integrated moving average – autoregresszív integrált mozgóátlagolású) folyamatnak tekintik, és az adatok alapján az eltolásos véletlen bolyongás modellspecifikációját találják megfelelőnek. A folyamat

[2] Az ARIMA-modellekről és az azokhoz szorosan kapcsolódó Box–Jenkins-módszertanról részletesebben lásd például *Asteriou–Hall* [2015] könyvét.

előrejelzése alapján a modellben az újrabecsült mortalitási index idősora várhatóan lineárisan, és az előrejelzett halandósági ráta exponenciálisan csökken. Az azóta Lee–Carter-modell néven elterjedt eljárás *Deaton–Paxson* [2001] szerint az ezredfordulóra a világ vezető halandóság-előrejelző módszerévé vált.

Fontos megjegyezni, hogy a Lee–Carter-modell – a továbbiakban ismertetendő egyéb módszerekhez hasonlóan – statisztikai alapú, ún. extrapolatív eljárás, amely a múltban megfigyelt trendek meghosszabbítására épül, figyelmen kívül hagyva a változások hátterében álló mögöttes (például orvostudományi, életmódbeli stb.) okokat. A halandósági folyamatok hátterében rejlő jelenségeket leíró strukturális modellekről például *Booth–Tickle* [2008] tanulmánya nyújt rövid összegzést, amelynek szerzői megállapítják, hogy ez a megközelítés jelentős kívánnivalókat hagy maga után az oksági kapcsolatok elégtelen ismerete miatt.

Keilman [1998] és [2008] tanulmányaiban amellett érvel, hogy a nemzeti és nemzetközi statisztikai szolgálatok által készített, gyakran szubjektív szakértői véleményekre alapozott hivatalos demográfiai projekciók pontossága erősen megkérdőjelezhető, mivel azok a múltban szisztematikusan és jelentősen alábecsülték az emberi élettartam javulási ütemét és ezáltal az élettartam-kockázat nagyságát. *Lee–Miller* [2001] és *Wong-Fupuy–Haberman* [2004] megállapítják, hogy a Lee–Carter-modellt visszamenőleg alkalmazva a hivatalos projekcióknál jóval megbízhatóbb előrejelzések készíthetők.

Nincs egyetértés azzal kapcsolatban, hogy vajon az emberi élettartam múltban tapasztalt, gyors ütemű növekedése a jövőben is folytatódik-e. Míg *Wong-Fupuy–Haberman* [2004] a pesszimista szakértői becslések pontatlansága és a Lee–Carter-modell meglepően jó teljesítménye alapján arra következtet, hogy a növekedés még sokáig, de nem végtelenségig fenntartható, addig a vitában szkeptikus álláspontra helyezkedők (például a maguk nézeteit „realistaként” aposztrofáló *Carnes–Olshansky* [2007]) megkérdőjelezik az extrapolatív halandóság-előrejelző eljárások alkalmazhatóságát, és elképzelhetőnek tartják, hogy a fejlett országokban a születéskor várható élettartamok hamarosan egyfajta plafonba ütköznek, sőt, akár csökkenőbe fordulnak majd (többek között az elhízás és a cukorbetegség terjedése következtében).

Brouhns–Denuit–Vermunt [2002] a Lee–Carter-modell normális eloszlású hibatagjainak alkalmazása helyett az egyes korcsoport-naptári év kombinációkhoz tartozó halálesetek számainak Poisson-eloszlását feltételezik. Az általuk javasolt, Poisson-féle Lee–Carter-modell néven is ismert változat számos előnnyel rendelkezik Lee–Carter eredeti elgondolásához képest: többek között nem él a homoszkedaszticitásra vonatkozó irreális feltevéssel, a maximum likelihood becslés révén figyelembe veszi az egyes korcsoport-naptári év kombinációkhoz tartozó létszámokat, szükségtelenné teszi a mortalitási index erősen heurisztikus, a sztochasztikus modellkeretbe nem illeszkedő újrabecslését, valamint könnyedén beágyazható aktuáriusi alkalmazásokba. *Brouhns–Denuit–van Keilegom* [2005] megmutatják, hogy a Poisson-féle modellváltozatban az előrejelzett halandósági ráták konfidenciaintervallumaiba építhető a paraméterbizonytalanság a statisztikai becsléselméletben *Efron* [1979] óta ismert bootstrap eljárás segítségével.

A Lee–Carter-modellel és annak Poisson-féle változatával szemben egyaránt felmerülő kritika, hogy az életkortól (keresztmetszeti) és naptári évtől függő (hosszmetszeti) hatásokon túl nem veszi figyelembe az azonos naptári időszakban született egyének halandóságának a születés időpontjától függő – a szakirodalomban kohorszhatás néven ismert – jellegzetességeit. Az eljárás legismertebb, kohorszhatást tartalmazó kiterjesztése *Renshaw–Haberman* [2006] modellje. Mivel ez az eljárás a gyakorlatban numerikusan instabilnak bizonyult, ezért *Haberman–Renshaw* [2011] korábbi elképzelésüket úgy egyszerűsítik, hogy az eredeti modellben életkortól függő kohorszhatást az életkortól függetlennek tekintik.[3]

Az eddig bemutatott módszerek közös jellemzője, hogy a halandóság hosszmetszeti változását egyetlen idősorral modellezik. Az ilyen, egytényezős modellek természetes kiterjesztései a több idősort tartalmazó, a szakirodalomban ún. többtényezős eljárások. A Lee–Carter-modell – bizonyos szempontból természetes – többtényezős kiterjesztését mutatja be *Booth–MainDonald–Smith* [2002] tanulmánya. Figyelembe véve, hogy a klasszikus Lee–Carter-modellben a keresztmetszeti és hosszmetszeti hatások paraméterei a soronként centralizált logaritmikus mortalitási ráták mátrixának szingulárisérték-felbontásával, majd a legnagyobb szingulárisértéknél kisebbek elhagyásával nyerhetők, *Booth–MainDonald–Smith* [2002] – a főkomponenselemzés (*Kovács* [2011]) analógiájára – a további szingulárisértékek közül is megtartanak néhányat, így téve többtényezőssé a modellt. A szerzők ausztrál adatok felhasználásával megállapítják, hogy az így nyert további tényezők nehezen építhetők be az előrejelzésekbe. *Booth–MainDonald–Smith* [2002] ajánlásokat fogalmaznak meg a mortalitási index kiigazításával és a becslési időszak kiválasztásával kapcsolatban. *Booth et al.* [2006] a *Lee–Miller*- [2001] és *Booth–MainDonald–Smith*-féle [2002], valamint az eredeti Lee–Carter-modell előrejelző képességét hasonlítják össze egymással, és tíz fejlett ország adatainak vizsgálatával megállapítják, hogy az újabb modellváltozatok pontossága jellemzően felülmúlja az eredetiét.

Haberman–Renshaw [2011] eljárásának nevezetes speciális esete az orvosi statisztikában már régóta alkalmazott korcsoport-időszak-kohorsz modell (*Hobcraft–Menken–Preston* [1982], illetve *Carstensen* [2007]), amelyben a kohorszhatáson kívül a hosszmetszeti hatás is – a Lee–Carter-modelltől eltérően – független az életkortól.

Az aktuáriusi gyakorlatban az újabban elterjedt többtényezős halandóság-előrejelző módszerek a kéttényezős *Cairns–Blake–Dowd*- [2006], valamint az azt általánosító, háromtényezős *Plat*- [2009] eljárások. Speciálisan az időskori halandó-

[3] Sajnos még az egyszerűsített modell illesztése is gyakran komoly numerikus problémákkal jár. A témát bővebben *Hunt–Villegas* [2015] tanulmánya tárgyalja.

ság előrejelzésére Plat saját modelljének olyan kéttényezős egyszerűsítését javasolja, amely a Cairns–Blake–Dowd-formula kohorszhatással bővített változata. A korábban ismertetett eljárásoktól eltérően ezekben a modellekben paraméteres formában adott a halandósági ráták érzékenysége a mortalitási tényezők változására.

Lovász [2011] tanulmánya finn és svéd halandósági adatok felhasználásával számos, az eddigiekben tárgyalt halandóság-előrejelző eljárást hasonlít össze egymással, és az eredmények alapján aktuáriusi alkalmazások céljára a Plat-modellt javasolja. *Cairns et al.* [2009] nagy-britanniai adatokon a Cairns–Blake–Dowd-, amerikai adatokon pedig a Renshaw–Haberman-modell illeszkedését találják a legmegfelelőbbnek, ugyanakkor megállapítják, hogy e formulák becsült paraméterei nem eléggé robusztusak a becslési időszak változtatására nézve. A szerzők a probléma megoldására a Cairns–Blake–Dowd-modell kvadratikus életkorhatást tartalmazó bővítését javasolják.

A tudományos és gyakorlati szakmák részéről egyaránt jelentkező, természetes igény a Lee–Carter-modell kritikája nyomán született, rendkívül szerteágazó halandóság-előrejelző eljárások átlátható, egységes módszertani keretbe foglalása. Erre többek között *Hunt–Blake* [2014], *Villegas–Kaishev–Millossovich* [2016], valamint *Currie* [2016] tettek kísérletet a közelmúltban. A Villegas–Kaishev–Millossovich által javasolt – számos, már létező és széles körben alkalmazott modellt felölelő – egységes modellkeret a GAPC (generalized age-period-cohort – általánosított korcsoport-időszak-kohorsz), a statisztikában és az aktuáriustudományokban elterjedt GLM (generalized linear model – általánosított lineáris modell), lásd például *McCullagh–Nelder* [1989], illetve magyarul *Gray–Kovács* [2001] analógiájára. A GAPC-modellkeret az életkorban és időszakban log-bilineáris vagy logit-bilineáris, egy- és többtényezős, valamint kohorszhatástól mentes és azt tartalmazó eljárásokat egységesíti. Az így nyert, igen széles modellcsalád tagjai többek között a korábbiakban már ismertetett Poisson-féle Lee–Carter- (*Brouhns–Denuit–Vermunt* [2002]), Renshaw–Haberman-, korcsoport-időszak-kohorsz- (*Carstensen* [2007]), Cairns–Blake–Dowd- és Plat-modellek. A GAPC-eljárások segítségével lehetőség nyílik többek között a paraméterbecslés, a modellválasztás és az előrejelzés egységes keretben történő tárgyalására és elvégzésére.

1.2. Az elemzés célja

Az élettartam-kockázat átfogó statisztikai és aktuáriusi elemzésére Magyarországon mindezidáig egyedül *Májer–Kovács* [2011] tett kísérletet. Tanulmányukban a 65–100 korévek 1970–2006. évi halandósági adataira a Lee–Carter-modellt illesztik, és a klasszikus statikus, keresztmetszeti halandósági tábla, valamint a halandóság előrevetítése alapján egyaránt kiszámítják a jelenlegi nyugdíjkorhatár betöltésekor, a 65 évesen várható hátralevő élettartamot és a nyugdíjcélú életjáradék egyszeri nettó díját. A szerzők eredményei alapján a nyugdíjazáskor várható élettartamot 6,33 százalékkal, az életjáradék egyszeri nettó díját pedig 4,51 százalékkal becsüli alá az élettartam-kockázatot figyelmen kívül hagyó keresztmetszeti számítás. Májer és Kovács két eltérő megközelítésben közölnek konfidenciaintervallumokat a nyugdíjazáskor várható élettartamra és az életjáradék nettó díjára: az első esetben *Lee–Carter* [1992] nyomán csupán a mortalitási index folyamatának véletlen hibatagjait tekintik a bizonytalanság forrásának, míg a második esetben a mortalitási index sztochasztikus trendparaméterét is valószínűségi változóként kezelik, így az előrejelzési hiba részeként – részben – a becslés során fellépő paraméter-bizonytalanságot is figyelembe veszik. Megmutatják továbbá, hogy élettartam-kockázat jelenlétében még nagy kockázatközösség esetén, határértékben sem válik a nyugdíjcélú életjáradék nyújtása kockázatmentessé a járadékszolgáltató számára.

Tanulmányom hátralévő részében bemutatom a halandóság-előrejelzésben új horizontokat nyitó GAPC-modellkeretet, röviden ismertetem a halandósági modellezés szerepét felértékelő, megváltozott nyugdíjpénztári szabályozást, majd a *Májer–Kovács* [2011] tanulmányában szereplő módszertan továbbfejlesztésével és aktualizálásával elemzem és számszerűsítem az élettartam-kockázat szerepét. Elemzésemben a Lee–Carter-modell keretein túllépve az általánosított GAPC-modellcsalád (*Villegas–Kaishev–Millossovich* [2016]) segítségével vizsgálom a nyugdíjcélú életjáradékok díjszámításában jelentkező élettartam-kockázatot. A mintán kívüli előrejelzési pontosság vizsgálata alapján amellett érvelek, hogy öt népszerű halandóság-előrejelző eljárás közül a Cairns–Blake–Dowd-modell segítségével jelezhetők előre legpontosabban a hazai időskori halandósági ráták. Számításaimat az 1975–2014. naptári évek halandósági adataira alapozom, ezáltal a *Májer–Kovács* [2011] által alkalmazott, 1970 és 2006 közötti éveket felölelő bázisidőszak alapján számított értékekhez képest jelentősen magasabb várható élettartamokat és nettó díjakat állapítok meg. A relatív alulárazottság emelkedésének bemutatása révén alátámasztom, hogy a közelmúltban az életjáradékok díjszámításában nőtt az élettartam-kockázat szerepe, illetve az annak figyelmen kívül hagyásával elkövethető hiba nagysága. További lényeges módszertani újítás, hogy elemzésemben a becslés során fellépő paraméter-bizonytalanságot a bootstrap (*Efron* [1979]) eljárás segítségével valamennyi paraméter kapcsán figyelembe veszem, ezáltal reálisabb képet nyújtva annak mértékéről.

2. Módszertan

Ebben a fejezetben az elvégzett számítások megértéséhez szükséges módszertani ismereteket igyekszem lehetőleg minimális terjedelemben összefoglalni.

2.1. Korspecifikus halandósági ráták

A halandóság számszerűsítésének alapvető leíró statisztikai eszköze a halandósági ráta (más néven halálozási arányszám), amely egy választott időszak és populáció vonatkozásában értelmezhető, és az adott időszak során és populációban bekövetkezett halálozások számának a populáció létszámához viszonyított arányaként számítható ki. Képlettel felírva:

$$m = \frac{D}{E},$$

ahol m a halandósági ráta, $D \in \mathbb{N}$ a vizsgált időszakban elhunytak száma, $E > 0$ pedig a vizsgált populáció valamilyen módon értelmezett létszáma. A vizsgált időszak hossza általában egy év, és tanulmányomban is ezt a konvenciót követem.

A populáció létszámát pontosabban kell definiálni: érthető alatta a vizsgált időszak kezdetén élő egyének száma (kezdeti kitettség [initial exposed to risk], jelölése: E^0), vagy a vizsgált időszak alatt élő egyének átlagos létszáma (központi kitettség [central exposed to risk], jelölése: E^c) is. Ez utóbbi a vizsgált időszak kezdetén életben levő egyénekre az időszak során megélt egyéni időmennyiségeket összegezve számítható ki.[4] Kezdeti kitettség alkalmazásakor kezdeti halandósági rátáról (initial death rate) (jelölése: m^0), központi kitettség esetén pedig központi halandósági rátáról (central death rate) (jelölése: m^c) beszélhetünk.

Tanulmányomban a továbbiakban a korcsoporttól és naptári évtől függő halandósági rátákra (jelölésük: m_{xt}, ahol $x \in \{1, 2, ..., X\}$ egy adott korcsoport, $t \in \{1, 2, ..., T\}$ pedig egy adott naptári év) koncentrálok. Ezek olyan speciális halandósági ráták, amelyeknél a vizsgált populáció a t-edik naptári év elején az x-edik korcsoportba tartozó egyének sokasága. A továbbiakban felső indexüktől függően az m_{xt} ráták kezdeti vagy központi, azok hiányában pedig e kettő közül bármely típusú halandósági rátákat jelölhetnek majd.

2.2. Az általánosított korcsoport-időszak-kohorsz modellcsalád

A *Villegas–Kaishev–Millossovich* [2016] által a közelmúltban javasolt, számos széles körben elterjedt halandóság-előrejelző módszert felölelő általánosított GAPC-modellcsalád alkalmazása feltételezi, hogy minden egyes $x \in \{1, 2, ..., X\}$ korcso-

[4] A központi kitettség mértékegysége fő és év is lehet attól függően, hogy átlagos létszámnak vagy összes megélt időmennyiségnek tekintjük.

portban és $t \in \{1, 2, ..., T\}$ időszakban ismert a bekövetkezett halálesetek $D_{xt} \in \mathbb{N}$ száma, valamint az $E_{xt}^{c} > 0$ központi vagy az $E_{xt}^{0} \in \mathbb{N}$ kezdeti kitettség értéke.[5]

A korcsoport- és időszakspecifikus halálozások D_{xt} számait a modell a $\tilde{D}_{xt}$ valószínűségi változók megvalósult értékeinek tekinti, melyek peremeloszlására vonatkozó feltevés – a rendelkezésre álló kitettségi adatok típusától függően – a Poisson vagy a binomiális eloszlás:

$$\tilde{D}_{xt} \sim Poisson\left(E_{xt}^{c} m_{xt}^{c}\right) \ (x = 1, 2, ..., X, \ t = 1, 2, ..., T) \quad \text{vagy}$$
$$\tilde{D}_{xt} \sim Bin\left(E_{xt}^{c}, m_{xt}^{c}\right) \ (x = 1, 2, ..., X, \ t = 1, 2, ..., T).$$

A GAPC-modellkeret feltételezi továbbá, hogy a különböző korcsoportidőszak-kombinációkhoz tartozó $\tilde{D}_{xt}$ ($x = 1, 2, ..., X$, $t = 1, 2, ..., T$) valószínűségi változók függetlenek.[6] A formulában a központi vagy kezdeti halandósági ráták becslőegyenletei a következők:

$$g\left(m_{xt}\right) = \eta_{xt} \ (x = 1, 2, ..., X, \ t = 1, 2, ..., T),$$

ahol η_{xt} a modell ún. szisztematikus komponense, $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ pedig folytonosan differenciálható, szigorúan monoton növő függvény (kapocsfüggvény [link function]). *Hunt–Blake* [2014] az általánosított lineáris modell szakirodalmára építve központi kitettségek és Poisson-eloszlás használatakor a

$$g(y) = \ln y \ (y > 0)$$

logaritmikus, kezdeti kitettségek és binomiális eloszlás alkalmazása esetén pedig a

$$g(y) = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right) \quad (0 < y < 1)$$

logit kapocsfüggvényt javasolják. A továbbiakban ezt a konvenciót követem.

A GAPC-modellcsalád szisztematikus komponense a korcsoport, időszak és kohorrsz függvényében így írható fel:

$$\eta_{xt} = a_x + \sum_{i=1}^{N} b_x^{(i)} k_t^{(i)} + b_x^{(0)} c_{t-x} \ (x = 1, 2, ..., X, \ t = 1, 2, ..., T), \qquad /1/$$

[5] Precízebben: minden korcsoportidőszak-kombinációra a kitettség azonos változata ismert.
[6] Pontosabban fogalmazva: adott halandósági ráták mellett feltételesen függetlenek.

ahol $N \in \mathbb{N}$ a modellezett korcsoportidőszak-interakciók száma, valamint a_x és $b_x^{(i)}$ korcsoporttól, $k_t^{(i)}$ időszaktól, c_{t-x} pedig kohorsztól függő, valós értékű paraméterek.

Mivel a modellbeli kohorszok lehetséges száma $T + X - 1$, ezért belátható, hogy adott N esetén az /1/ egyenlet paramétereinek száma $(N+1)(X+T)+2X-1$, melyek elegendően nagy X és T értékeknél képesek lehetnek kellően tömören leírni a megadott XT darab halandósági rátát. A becsült paraméterek egyértelműsége érdekében a modellt ún. identifikációs megkötésekkel szükséges kiegészíteni, melyek konkrét specifikációnként eltérnek.

Az $a_x\,(x = 1, 2, ..., X)$ korcsoporthatás-paraméterek a mortalitási görbe általános alakját írják le. A c_{t-x} ($x = 1, 2, ..., X$, $t = 1, 2, ..., T$) kohorszhatás-paraméterek a $t - x$ időszakban születettek halandóságának a tipikus mortalitási pályához képesti eltérését reprezentálják a modellben. A $k_t^{(i)}$ ($i = 1, 2, ..., N$, $t = 1, 2, ..., T$) mortalitási indexek az általános halandósági szint időbeli alakulását N darab idősor formájában modellezik, a mortalitási indexek $b_x^{(i)}$ ($i = 0, 1, ..., N$, $x = 1, 2, ..., X$) érzékenységi együtthatói pedig a transzformált halandósági ráták érzékenységét adják meg, $i = 0$ előfordulásakor a kohorszhatás, egyéb esetben pedig az *i*-edik mortalitási index megváltozására nézve.

2.3. A GAPC-modellcsalád nevezetes tagjai

Alkalmasan választott paraméterezés mellett a GAPC-modellcsalád számos széles körben használatos halandóság-előrejelző módszert tartalmaz. Ebben az alfejezetben a nevezetesebb ilyen módszereket és azok GAPC-modellcsaládhoz fűződő viszonyát ismertetem. Az eljárások bemutatása során a korcsoportok minden esetben egymást követő koréveket jelentenek majd.

2.3.1. A Poisson-féle Lee–Carter- (LC-) modell

A *Brouhns–Denuit–Vermunt* [2002] által bevezetett és azóta széles körben elterjedt modellkeretben a mortalitást leíró szisztematikus komponens a következő:

$$\eta_{xt} = a_x + b_x k_t \;\; (x = 1, 2, ..., X \,,\; t = 1, 2, ..., T).$$

A szerzők központi kitettségeket és logaritmikus kapocsfüggvényt feltételeznek, továbbá identifikációs megfontolásból szükségesek a következő paramétermegkötések:

$$\sum_{x=1}^{X} b_x = 1, \quad \sum_{T=1}^{T} k_t = 0.$$

A modell nem tartalmaz kohorszhatást, illetve a halandóság alakulását egyetlen időtől függő mortalitási index segítségével modellezi.

Érdemes megjegyezni, hogy az LC-eljárás alapváltozata nem illeszkedik a GAPC-modellcsaládba, mivel *Lee–Carter* [1992] híres tanulmányában nem a halálesetek számának Poisson-eloszlásában, hanem a szisztematikus komponens egyenletének jobb oldalához hozzáadott korrelálatlan, normális eloszlású, azonos varianciájú hibatagokon keresztül jelenik meg a bizonytalanság a modellben.

2.3.2. A Renshaw–Haberman- (RH-) modell

Renshaw–Haberman [2006] a kohorszhatás figyelembevételére a következő szisztematikus komponenst javasolják:

$$\eta_{xt} = a_x + b_x^{(1)} k_t + b_x^{(0)} c_{t-x} \quad (x = 1, 2, ..., X, \; t = 1, 2, ..., T).$$

A szerzők központi kitettségeket és logaritmikus kapocsfüggvényt feltételeznek.

Mivel a modell kritikusai rámutattak a becslési eljárás numerikus instabilitására, ezért újabb cikkükben *Haberman–Renshaw* [2011] az egyszerűsítés érdekében a

$$b_x^{(0)} = 1 \; (x = 1, 2, ..., X)$$

megkötést ajánlják, mely – lemondva a kohorszhatás életkor szerinti differenciálásáról – megoldja az eredetileg javasolt formula numerikus problémáit. Az így módosított, a továbbiakban általam is alkalmazott RH-modell szisztematikus komponense:

$$\eta_{xt} = a_x + b_x k_t + c_{t-x} \; (x = 1, 2, ..., X, \; t = 1, 2, ..., T).$$

A szerzők a paraméterbecslés egyértelműsége érdekében a következő identifikációs megkötéseket javasolják:

$$\sum_{x=1}^{X} b_x = 1, \quad \sum_{t=1}^{T} k_t = 0, \quad \sum_{i=1-X}^{T-1} c_i = 0.$$

2.3.3. A korcsoport-időszak-kohorsz (APC-) modell

A *Carstensen* [2007] által ismertett APC- (age-period-cohort – korcsoport-időszak-kohorsz) modell az egyszerűsített RH-eljárás speciális esete a

$$b_x = 1 \quad (x = 1, 2, ..., X)$$

megkötés mellett. Ennek szisztematikus komponense:

$$\eta_{xt} = a_x + b_x + c_{t-x} \ (x = 1, 2, ..., X,\ t = 1, 2, ..., T).$$

Tehát az APC-modell $N = 1$ mortalitási indexet tartalmaz, és a korcsoportfüggő érzékenységi együtthatók egységnyiek. Az APC-eljárásban a központi kitettségek és a logaritmikus kapocsfüggvény használata, valamint a következő identifikációs megkötések alkalmazása terjedt el:

$$\sum_{t=1}^{T} k_t = 0, \quad \sum_{i=1-X}^{T-1} c_i = 0, \quad \sum_{i=1-X}^{T-1} ic_i = 0.$$

2.3.4. A Cairns–Blake–Dowd- (CBD-) modell

Cairns–Blake–Dowd [2006] által az időskori halandóság előrejelzésére javasolt modell szisztematikus komponense:

$$\eta_{xt} = k_t^{(1)} + (x - \bar{x})k_t^{(2)} \ (x = 1, 2, ..., X,\ t = 1, 2, ..., T),$$

ahol $\bar{x} = \dfrac{1+X}{2}$ az előforduló korcsoport-indexek számtani átlaga.

A módszer alkalmazását a szerzők $x_0 = 60$ évesnél magasabb életkorok esetén javasolják, azzal a kiegészítéssel, hogy az η_{xt} szisztematikus komponens az $x_0 + x$ éves egyének mortalitását írja le. A CBD-modellben nem szerepel additív életkor- és kohorszhatás,[7] és a mortalitás alakulását két index írja le. *Cairns–Blake–Dowd* [2006] cikkükben kezdeti kitettségeket és logit kapocsfüggvényt tételeznek fel. E modellben nincs szükség identifikációs megkötésekre.

2.3.5. A Plat-modell

Az időskori mortalitás modellezésére javasolt Plat-modell szisztematikus komponense:

$$\eta_{xt} = a_x + k_t^{(1)} + (x - \bar{x})k_t^{(2)} + c_{t-x} \ (x = 1, 2, ..., X,\ t = 1, 2, ..., T),$$

[7] Érdemes megjegyezni, hogy a CBD-modell bővítéseként *Cairns et al.* [2009] kohorszhatás bevezetését javasolják. E modellváltozatot itt nem tárgyalom.

amely az $x_0 + x$ éves egyének halandóságát írja le, ahol x_0 valamely kiinduló életkor (például $x_0 = 60$ év). *Plat* [2009] cikkében központi kitettségeket és logaritmikus kapocsfüggvényt feltételez, és a következő identifikációs megkötéseket javasolja:

$$\sum_{t=1}^{T} k_t^{(1)} = 0, \quad \sum_{t=1}^{T} k_t^{(2)} = 0,$$

$$\sum_{i=1-X}^{T-1} c_i = 0, \quad \sum_{i=1-X}^{T-1} i c_i = 0.$$

2.4. Áttekintés és csoportosítás

Szisztematikus komponenseik alapján a GAPC-modellcsalád tagjai a korcsoport- és kohorszhatás jelenléte, a mortalitási indexek N száma és az érzékenységi együtthatók jellege (képlettel adott vagy nemparaméteres) szerint csoportosíthatók. Ezenkívül a halandósági ráták jellege szerint egymástól elkülöníthetők a központi és kezdeti halandósági rátákra épülő GAPC-modellek, azzal a kiegészítéssel, hogy a haláleseteik számára vonatkozó feltevés az előbbiek esetén a Poisson-, az utóbbiaknál pedig a binomiális eloszlás. A GAPC-modellcsaládhoz tartozó, jelen fejezetben bemutatott nevezetes eljárások e szempontok szerinti csoportosítását az 1. táblázatban és a 2. ábrán szemléltetem.

1. táblázat

Néhány nevezetes GAPC-modell jellemzői

Eljárás	Korcsoport	Kohorsz	*N*	Érzékenység	Kitettség	Kapocs
APC	van	van	1	egységnyi	központi	log
CBD	nincs	nincs	2	képlettel adott	kezdeti	logit
LC	van	nincs	1	nemparaméteres	központi	log
Plat	van	van	2	képlettel adott	központi	log
RH	van	van	1	nemparaméteres	központi	log

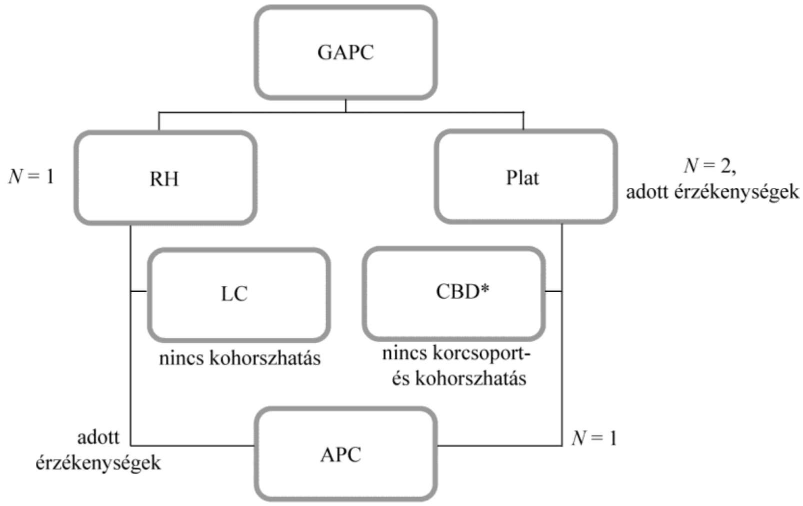
Forrás: Saját szerkesztés.

A 2. ábrán látható, hogy a GAPC-modellcsalád két nevezetes ágát az RH-[8] és Plat-eljárások adják. Az előbbi nevezetes alesetei a kohorszhatást nem tartalmazó

[8] Pontosabban annak *Haberman–Renshaw* [2011] cikkében bemutatott, egyszerűsített változata.

Poisson-féle LC- és az egységnyi érzékenységi együtthatókkal rendelkező APC-modellek, Plat módszerének nevezetes alesetei pedig a korcsoport- és kohorszhatást nem tartalmazó CBD- és az egyetlen mortalitási indexet feltételező APC-modellek. Az APC-módszer – mint a legegyszerűbb, korcsoport- és kohorszhatást egyaránt tartalmazó eljárás – a GAPC-modellcsalád mindkét ágának speciális esete, így nevéhez hűen a GAPC-család bizonyos értelemben valóban ezt az eljárást általánosítja.

2. ábra. A GAPC-modellcsalád néhány nevezetes tagja és a közöttük fennálló hierarchia



* A CBD-modell kezdeti kitettségeket és logit kapocsfüggvényt feltételez. A többi modell esetén a központi kitettségek és a logaritmikus kapocsfüggvény alkalmazása általános.

Forrás: Saját szerkesztés.

Az általános, illetve az időskori halandóság modellezésére ebben a sorrendben a 2. ábra bal oldali, illetve mindkét ágán szereplő modellek alkalmazhatók. Természetesen számos további halandóság-előrejelző eljárás előállítható a GAPC-modellcsalád megfelelő paraméterezésével.

2.5. Paraméterbecslés, modellválasztás és előrejelzés

A GAPC-családba tartozó modellek paramétereinek becslése a maximum likelihood elv segítségével végezhető el.[9] A log-likelihood függvény maximalizálá-

[9] A log-likelihood függvény képlete megtalálható például *Villegas–Kaishev–Millossovich* [2016] tanulmányában.

sára *Brouhns–Denuit–Vermunt* [2002] a Newton-módszert választják, *Villegas–Kaishev–Millossovich* [2016] pedig a GLM illesztésére használható, számos statisztikai programcsomagba beépített optimalizáló algoritmusokat javasolják. Egymásba ágyazott modellek közötti választásra természetesen ebben az esetben is megfelelő a statisztikában széleskörűen alkalmazott likelihood-arány teszt.

A paraméterbecslést követően a mortalitási indexek becsült értékeinek együttes alakulását *Cairns–Blake–Dowd* [2006], *Haberman–Renshaw* [2011], valamint *Villegas–Kaishev–Millossovich* [2016] többdimenziós eltolásos véletlen bolyongásként (multivariate random walk with drift) modellezik. A kohorszhatás becsült értékeinek alakulását szintén ARIMA-modellek segítségével szokás modellezni. Erre a célra *Renshaw–Haberman* [2006] az eltolásos ARIMA(1,1,0)-, míg *Plat* [2009] az eltolásos ARIMA(2,2,0)-modellt javasolja. A naptári időszaktól és kohorsztól függő idősoros folyamatok paraméterbecslését követően a halandósági ráták a megfelelő idősormodellek extrapolálásával jelezhetők előre.

A halandóság-előrejelző módszerek alkalmazásával járó bizonytalanság modellezésére *Lee–Carter* [1992] óta szokásos eljárás az időtől függő paraméterek hibatagjainak Monte-Carlo-szimulációja. Ez a megoldás ugyanakkor félrevezető eredményeket produkál, mivel a modell paramétereit implicit módon azok mintából becsült értékeivel azonosítja, figyelmen kívül hagyva ezáltal a becslési eljárásból fakadó paraméterbizonytalanságot. A GAPC-modellcsalád keretében az előrejelzési és a paraméterbizonytalanság együttesen a *Brouhns–Denuit–van Keilegom* [2005], valamint *Villegas–Kaishev–Millossovich* [2016] által javasolt félparaméteres bootstrap (semiparametric bootstrap) eljárás segítségével vehető figyelembe[10], mivel analitikus módszerekkel a bizonytalanság két forrása nehezen kezelhető együttesen. *Koissi–Shapiro–Hognas* [2006] alternatív megközelítésként az illesztett modell hibatagjaiból vett mintavételezésen alapuló reziduális bootstrap módszert ajánlják.

A *Brouhns–Denuit–van Keilegom* [2005] által javasolt félparaméteres bootstrap eljárás keretében a $B \in \mathbb{N}_{>0}$ darab szimulált mintában először a D_{xt} ($x = 1, 2, ..., X$, $t = 1, 2, ..., T$) ismert haláleseti gyakoriságokat újra kell generálni a megfigyelt értékekkel azonos várható értékű Poisson- vagy binomiális eloszlásokból, majd a modellillesztést és az előrejelzést minden egyes $\left\{D_{xt}^{b}\right\}_{x \in \{1, 2, ..., X\},\, t \in \{1, 2, ..., T\}}$ ($b = 1, 2, ..., B$) bootstrap mintára el kell végezni, a modellválasztási lépés nélkül, az összes mintára az eredetileg javasolt formulát alkalmazva. A vizsgálni kívánt véletlen mennyiségek (például halandósági ráták vagy várható élettartamok) elméleti eloszlása a mintaméret növelésével határértékben azok bootstrap mintákban megfigyelt empirikus eloszlásával közelíthető.

[10] A bootstrap módszert *Efron* [1979] javasolta először általánosabb kontextusban.

2.6. Az életjáradékok díjszámítása statikus és dinamikus halandósági ráták alapján

Az x éves korban várható hátralévő élettartamot statikus halandóság mellett megadó összefüggés (*Banyár* [2003]):

$$e_x = \sum_{i=1}^{\omega - x} \prod_{j=0}^{i-1} \left(1 - q_{x+j}\right) + \frac{1}{2} \quad (x = 0, 1, ..., \omega),$$

ahol a q_x $(x = 0, 1, ..., \omega)$ értékek az alkalmazott halandósági táblában szereplő ún. koréves halálozási valószínűségek, ω pedig a feltételezett legmagasabb elérhető életkor (a KSH gyakorlata alapján $\omega = 100$ év). A megfelelő összefüggés előrejelzett, dinamikus halandóság alkalmazása esetén:

$$e_{x,T} = \sum_{i=1}^{\omega - x} \prod_{j=0}^{i-1} \left(1 - q_{x+j,\, T+j}\right) + \frac{1}{2} \quad (x = 0, 1, ..., \omega),$$

ahol q_{xt} $(x = 0, 1, ..., \omega,\ t = T, T+1, T+2, ...)$ az x éves egyének koréves halálozási valószínűsége a t-edik naptári évben, T pedig az aktuális naptári év.

Az x éves korú egyének azonnal induló, élethosszig tartó, évi egy forint összegű életjáradékának egyszeri nettó díjképlete az aktuáriusi ekvivalenciaelv (*Banyár* [2003]) alapján:[11]

$$\ddot{a}_x = \sum_{i=0}^{\omega - x} \left[v^i \prod_{j=0}^{i-1} \left(1 - q_{x+j}\right) \right] \quad (x = 0, 1, ..., \omega),$$

ahol v a technikai kamatláb[12] alapján számított éves diszkonttényező. A nettó díj azt az életjáradékért cserébe nyújtandó egyösszegű befizetést adja meg, amely mellett a járadékszolgáltató a technikai kamatlábnak megfelelő, rögzített éves befektetési hozam feltételezése mellett, a járadékfizetésen kívüli egyéb költségek figyelembe vétele nélkül várhatóan nulla profitot realizál. Az életjáradék ténylegesen fizetendő bruttó díja (*Banyár* [2003]) a nettó díj és a tényleges éves életjáradék összegének szorzata, növelve a költségek, valamint a szolgáltatói profit fedezetével.[13]

[11] A képletben az üres szorzat értéke definíció szerint egynek tekintendő.

[12] A technikai kamatláb a befektetett életbiztosítási díjtartalékon garantált éves hozamráta, melynek segítségével az aktuárius az életbiztosítások klasszikus díjkalkulációja során meghatározza a jövőbeli pénzáramlások jelenértékét (*Banyár* [2003]).

[13] Az életjáradékok kifizetései a valóságban általában évesnél sűrűbb (például havi) gyakoriságúak. Ennek hatása az életjáradék nettó díjára jellemzően csekély, illetve a nettó díjjal közelítőleg arányos, így a továbbiakban az egyszerűség kedvéért éves gyakoriságú járadékfizetést tételezek fel.

Dinamikus halandósági ráták használata esetén a megfelelő összefüggés:

$$\ddot{a}_{x,T} = \sum_{i=0}^{\omega-x}\left[v^i \prod_{j=0}^{i-1}\left(1-q_{x+j,\,T+j}\right)\right] \quad (x = 0, 1, ..., \omega),$$

ahol T az aktuális naptári év a díjszámítás pillanatában.

A továbbiakban a q_{xt} koréves halálozási valószínűségeket *Ágoston–Kovács* [2000] nyomán a maximum likelihood elv alapján az m_{xt}^0 kezdeti halandósági rátákkal becsülöm, és központi halálozási ráták előrejelzése esetén azokat a széles körben alkalmazott

$$m_{xt}^0 = \frac{m_{xt}^c}{1+\frac{1}{2}m_{xt}^c}$$

közelítés (*Májer–Kovács* [2011]) segítségével alakítom kezdeti halandósági rátákká.

3. Empirikus elemzés

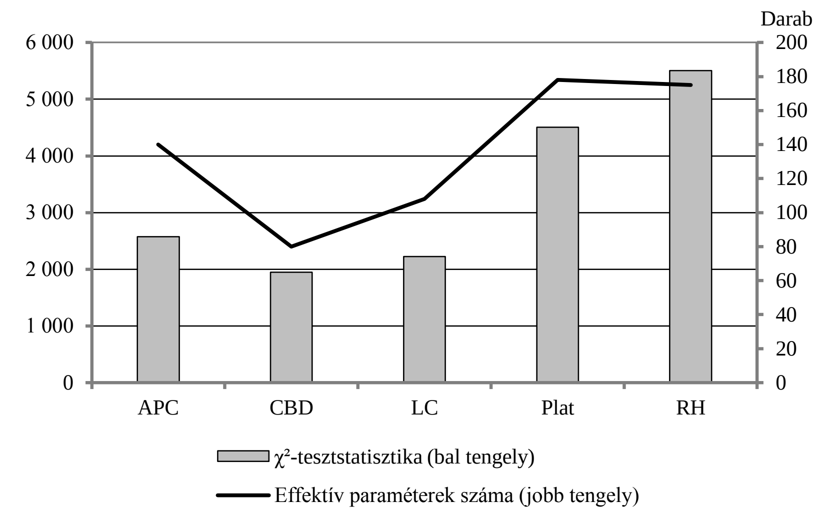
A nyugdíjas korú egyének halandósági rátáinak előrejelzése érdekében a KSH 1979–2013. naptári évekre és 65 és 99 közötti korévekre vonatkozó, naptári és korévek szerint bontott létszám- és halálozási adatait használtam fel.[14] Mivel az Európai Unió erre vonatkozó irányelve (*EU* [2004]) értelmében a járadékbiztosítások díjkalkulációjában tilos a nemek szerinti megkülönböztetés, ezért ezeket az adatokat aggregáltam, és a számításokat a nemtől független (uniszex) korévenkénti létszámok és haláleseti gyakoriságok alapján végeztem el. A halandósági ráták előrejelzésére a GAPC-modellcsaládba tartozó, a 2. ábrán korábban szemléltetett APC-, CBD-, Poisson-féle LC- és időskori Plat-modelleket, valamint a RH-eljárás egyszerűsített változatát alkalmaztam. A számításokat az R statisztikai programcsomag (*Villegas–Kaishev–Millossovich* [2016]) segítségével végeztem el.

A legjobb mintán kívüli előrejelzési teljesítményt nyújtó metódus kiválasztása és a túlillesztés elkerülése érdekében az 1975–2014. naptári éveket az 1975–2004. naptári éveket magába foglaló tanuló és az 2005–2014. naptári éveket felölelő tesztelő

[14] *Banyár* [2012] részletesen foglalkozik a járadékok díjszámításához használható halandósági tábla kiválasztásának kérdésével. Járadékszolgáltatók egyedi halandósági adatai híján itt kénytelen vagyok a néphalandósági adatokból kiindulni.

időszakra osztottam fel. A felsorolt öt modell paramétereinek becslését a tanuló időszakon, illeszkedésük vizsgálatát pedig a széles körben alkalmazott χ^2-statisztika (*Benjamin–Pollard* [1993]) alapján a tesztelő időszakon végeztem el. Az eljárás során az első húsz korévet (vagyis a 65–84 évesek adatait) vettem figyelembe, mivel a későbbi korévek már kevésbé relevánsak a hozzájuk tartozó alacsonyabb túlélési valószínűségek és a járadékok díjszámítása során alkalmazott diszkontálás miatt. A tesztstatisztikák értékeit és az illesztett modellek effektív paramétereinek számát a 3. ábra szemlélteti.[15]

3. ábra. A GAPC-modellek illeszkedése a tesztidőszakon (2005–2014) a 65–84 év közötti életkorokban és a modellek effektív paraméterszáma



Forrás: Saját szerkesztés.

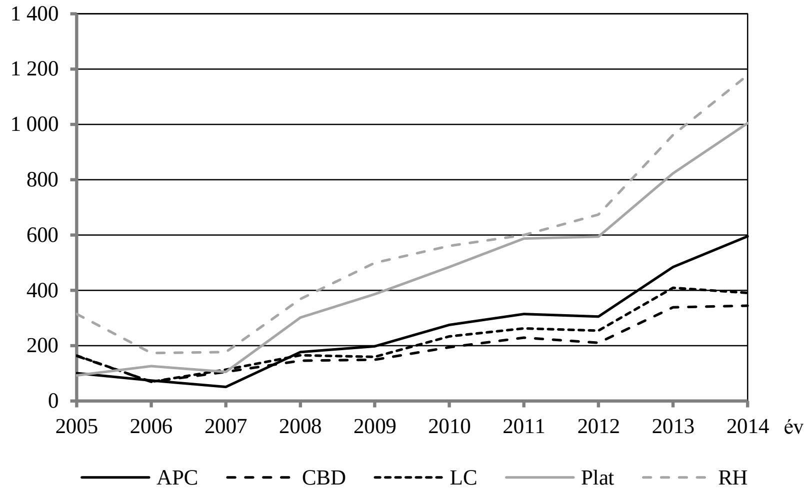
A 3. ábra alapján a tesztelő időszakon a legjobb előrejelzési teljesítményt a kifejezetten az időskori halandóság előrejelzésére kifejlesztett CBD-modell nyújtja, melyet illeszkedés szerinti sorrendben a Poisson-féle LC- és az APC-eljárás követ. A rangsort az első háromtól leszakadva a Plat- és az RH-modell zárja. A CBD-modell jó teljesítménye annál is inkább figyelemre méltó, mert ez rendelkezik a vizsgált öt formula közül a legkevesebb effektív paraméterrel. A magasabb effektív paraméterszámú modellek gyengébb előrejelzési pontosságának oka a túlillesztésben keresen-

[15] Az alacsonyabb χ^2-tesztstatisztikák utalnak jobb illeszkedésre. Az országos létszámadatok használatából adódó nagy mintaméret miatt az illeszkedésre vonatkozó nullhipotézis valamennyi modell esetén határozottan elutasítható. Effektív paraméterszám alatt a többi paraméter által az identifikációs megkötések révén nem meghatározott paraméterek száma értendő.

dő: ezek a kevesebb paramétert tartalmazó eljárásoknál szükségszerűen jobban illeszkednek a tanuló időszak adataira, ugyanakkor a tesztelő időszak éveire már gyengébb előrejelzést eredményeznek, hasonlóan ahhoz, mintha egy közel lineáris egyváltozós idősort magas fokszámú polinom segítségével jeleznénk előre.

A 4. ábra alapján az előrejelzési időtáv növekedésével jellemzően valamennyi vizsgált modell előrejelzési pontossága csökken. A pontosság romlási üteme a magas effektív paraméterszámú Plat- és RH-modelleknél a legszembetűnőbb, illetve ezekkel szemben a legjobb illeszkedést nyújtó CBD- és Poisson-féle LC-eljárások esetén a legmérsékeltebb. A naptári évenkénti elemzés megerősíti a CBD-modell alkalmazhatóságát, annál is inkább, mivel a továbbiakban az életjáradékok díjszámítása az itt bemutatottnál jóval hosszabb, 35 éves előrejelzési horizont használatát teszi majd szükségessé.

4. ábra. A GAPC-modellek illeszkedése a tesztidőszakon (2005–2014) naptári évenként, a 65–84 év közötti életorokban



Forrás: Saját szerkesztés.

Életkor szerint egyébként egyik vizsgált eljárás esetén sem figyelhető meg monoton trend az előrejelzési pontosság alakulásában. A legpontosabbnak ítélt CBD- és Poisson-féle LC-modellek közötti fő különbség e tekintetben a 65–70 év közötti életkorokban figyelhető meg: itt a CBD-formula érezhetően pontosabb előrejelzést szolgáltat. 72 éves kortól kezdve egymással közel megegyezik e két modell előrejelzési pontossága.

Az eredmények alapján összességében megállapítható, hogy a vizsgált adatsoron a hazai időskori halandóság előrejelzésére az öt kiválasztott GAPC-modell közül a

CBD-eljárás használata javasolt, mert ez rendelkezik a legalacsonyabb mintán kívüli előrejelzési hibával és emellett a legkevesebb effektív paraméterrel, előrejelzési hibája a legalacsonyabb ütemben emelkedik az időhorizont növelésével, valamint az életjáradékok díjszámításánál lényeges, hogy a 65–70 év közötti életkorok halandóságát a Poisson-féle LC-modellhez képest jóval alacsonyabb hibával jelzi előre a tesztelő időszakon. Nem mellékes szempont az sem, hogy *Cairns–Blake–Dowd* [2006] cikkükben e metódust kifejezetten az időskori halandóság előrejelzésére javasolják az LC-modell alternatívájaként.

4. Életjáradékokkal kapcsolatos eredmények

Az élettartam-kockázat szerepének számszerűsítése érdekében elsőként a 65–99 éves egyének életkorfüggő halandósági rátáit a GAPC-modellcsaládba tartozó, korábban már bemutatott öt eljárás felhasználásával előrejeleztem a 2016–2050. naptári évekre, majd az előrejelzést a *Villegas–Kaishev–Millossovich* [2016] tanulmányában javasolt félparaméteres bootstrap eljárás segítségével egyenként ötezer replikációból[16] álló bootstrap mintákon is megismételtem. A nyugdíjkorhatár betöltésekor várható e_{65} hátralévő élettartam és $\ddot{a}_{65}$ egyszeri nettódíj-értékeket a halandósági ráták várható értékeinek megfelelő pontbecslések alapján, illetve valamennyi szimulált bootstrap mintában egyenként is meghatároztam. Az összehasonlítás kedvéért a legfrissebb ismert, 2014. évi néphalandósági tábla alapján – a klasszikus aktuáriusi gyakorlattal összhangban időben változatlan, statikus halandósági rátákat feltételezve – is elvégeztem a számításokat. Mivel a technikai kamatláb maximális mértéke a Magyar Nemzeti Bank vonatkozó rendelete (*Magyar Közlöny* [2015a]) alapján forintban fennálló kötelezettségek esetén 2016. július 1-jétől évi 2,3 százalék, ezért a számítások során a $v = 1/1{,}023$ diszkonttényezőt alkalmaztam. További összehasonlításra adtak lehetőséget a *Májer–Kovács* [2011] tanulmányában bemutatott eredmények, melyek az LC-modell és az 1970–2006. évekből álló bázisidőszak alapján, 3 százalékos technikai kamatláb feltételezésével készültek.

A CBD-eljárás alapján nyert számítási eredményeimet és a *Májer–Kovács* [2011] cikkében szereplő megfelelő mutatószámokat ebben a sorrendben a 2. táblázat foglalja össze. A táblázat keresztmetszeti oszlopában a legutolsó ismert halandósági tábla alapján számított (statikus) értékek, a várható értékeket és bootstrap konfidenciaintervallumokat tartalmazó oszlopában a halandóság-előrejelzés segítsé-

[16] A bootstrap minták számának növelése ötezer replikáció felett már csak elhanyagolható mértékben változtatta meg a számított konfidenciaintervallumok határait.

gével nyert kohorszszemléletű (dinamikus) eredmények, a statikus hiba oszlopában pedig a keresztmetszeti szemléletben a dinamikus várható értékekhez képest elkövetett százalékos hibák nagyságai láthatók.

2. táblázat

Összehasonlítás: a 65 éves korban várható hátralevő élettartam és az életjáradék egyszeri nettó díja

Mennyiség	Keresztmetszeti érték	Várható érték (konfidenciaintervallum)	Statikus hiba (százalék)
	Saját számítás (bázisidőszak: 1975–2014)		
e_{65} (év)	16,47	18,21 (16,61; 19,80)	−9,51
$\ddot{a}_{65}$ (forint)	13,72	14,78 (13,83;15,72)	−6,43
	Májer–Kovács [2011] (bázisidőszak: 1970–2006)		
e_{65} (év)	15,39	16,43 (15,12; 17,83)	−6,33
$\ddot{a}_{65}$ (forint)	11,87	12,43 (11,70; 13,17)	−4,50

Forrás: Saját számítás és *Májer–Kovács* [2011].

A 2. táblázat alapján megállapítható, hogy a statikus, keresztmetszeti szemléletben számított, 65 éves korban várható hátralévő élettartam 2006–2014 között 1,08 évvel, a nyugdíjcélú életjáradék egyszeri nettó díja pedig 1,85 Ft-tal emelkedett. Ez utóbbi hatás részben a várható élettartam növekedésének, részben pedig a technikai kamatláb csökkenésének következménye.[17] Számításaim alapján már az élettartamkockázatot figyelmen kívül hagyó, keresztmetszeti értékek is meghaladják a *Májer–Kovács* [2011] által közölt kohorszszemléletű, dinamikus várható értékeket, és a dinamikus értékek konfidenciaintervallumai jóval szélesebbek az említett tanulmányban szereplő megfelelőikhez képest, mivel az utóbbiak – az új számítás során alkalmazott bootstrap eljárással szemben – a mortalitási index sztochasztikus trendparaméterét leszámítva nem tartalmazzák a paraméterbecslésből fakadó bizonytalanságot. A naiv, statikus szemlélet alkalmazásával elkövetett százalékos hiba nagysága mind a várható hátralévő élettartam, mind az életjáradék nettó díja esetén közel másfélszerese a *Májer–Kovács* [2011] eredményei alapján számított százalékos hibának,

[17] Érdemes megjegyezni, hogy az LC-modell használata az újabb adatokon minimális eltéréssel a CBD-eljárással közel azonos eredményt ad, így a különbség nem a módszerválasztásból adódik.

ami a módszertani különbségeken túl is arra enged következtetni, hogy az élettartam-kockázat jelentősége nőtt az utóbbi években. A statikus szemlélet alkalmazása a nyugdíjazáskor várható hátralévő élettartamot közel két évvel alábecsüli, és a nyugdíjcélú életjáradékok esetén 6,43 százalékos alulárazottsághoz vezet, ami például évi 1 millió Ft összegű havi járadék esetén a szerződés megkötésekor 1 millió 60 ezer Ft tartalékhiányt[18] és ezáltal ugyanekkora nagyságú, a biztosítási gyakorlatban is igen jelentős azonnali veszteséget jelent a járadékszolgáltató számára.

5. Összefoglalás

Eredményeim alapján megállapítható, hogy a hazai időskori uniszex halandósági rátákat a 2005–2014. évekből álló tesztelő időszakon öt népszerű halandóság-előrejelző módszer közül a kifejezetten az időskori halandóság előrejelzésére kifejlesztett CBD-modell jelzi előre a legmegfelelőbben.[19] A választott eljárás mellett szól az is, hogy az előrejelzési hiba az időhorizont növelésével ennek használata esetén növekszik a legalacsonyabb ütemben, és a nyugdíjszámítások szempontjából legfontosabb 65–70 éves korcsoportban értéke jóval alacsonyabb az egyébként összességében második legpontosabb előrejelzést nyújtó Poisson-féle LC-modellhez (*Brouhns–Denuit–Vermunt* [2002]) képest. A jóval több paraméterrel rendelkező Plat- és RH-modellek használata túlillesztéshez vezet, amelyre a tanuló időszakon mért kiváló illeszkedésük és ezzel párhuzamosan a tesztelő időszakon mért gyenge – és az időhorizont növelésével gyors ütemben romló – előrejelzési pontosságuk enged következtetni.

A CBD-modell segítségével előrejelzett, dinamikus uniszex néphalandósági tábla használata esetén a nyugdíjkorhatáron várható hátralevő élettartam majdnem két évvel felülmúlja a klasszikus módszertan alapján, statikus halandóság feltételezésével számított értéket. A statikus számítás a nyugdíjcélú életjáradék egyszeri nettó díját 6,43 százalékkal alábecsüli, ami például évi 1 millió Ft összegű életjáradék esetén 1 millió 60 ezer Ft körüli, a biztosítási gyakorlatban igen jelentős mértékű azonnali tartalékhiányt és veszteséget okoz a járadékszolgáltatónak. A statikus halandóság feltételezése miatt jelentkező alulárazottság mértéke a *Májer–Kovács* [2011] tanulmányában szereplő 4,51-ről 6,43 százalékra nőtt a 2006 és 2014 közötti időszakban. A változás az aktuáriusi gyakorlat szempontjából rendkívül jelentős,

[18] A tartalékhiány a dinamikus és statikus díjak különbsége, szorozva az éves járadéktag összegével.

[19] Itt a legjobb előrejelzés kritériuma a tesztelő időszakon számított χ^2 -tesztstatisztika az életjáradékok szempontjából legfontosabb 65–84 éves életkorokban.

továbbá a néphalandóság vizsgálatából adódó hatalmas mintaméret miatt formális teszt alkalmazása nélkül is kijelenthető, hogy statisztikai értelemben is szignifikáns.

Mindezek alapján levonható az a következtetés, hogy Magyarországon a nyugdíjcélú életjáradékok esetén 2006 és 2014 között jelentősen emelkedett a statikus halandóság feltételezésével elkövetett díjszámítási hiba nagysága, ami arra enged következtetni, hogy a vizsgált időszakban nőtt az élettartam-kockázat szerepe a vizsgált piacon. Továbbá mivel a biztosítási ügyfelek halandósága jellemzően jóval alacsonyabb a néphalandóságnál, és – részben tudatos antiszelekció következtében – a járadéktermékeket a biztosítási ügyfelek közül is jellemzően az alacsonyabb halandóságú ügyfelek vásárolják (*Banyár* [2003]), ezért a járadéktermékek állományaiban feltehetően a kimutatott árazási hibánál még jelentősebb tévedésre lehet számítani a biztosítási gyakorlatban.

Bár a járadékbiztosítások piaca Magyarországon egyelőre csekély méretű, a tanulmányomban megvizsgált kérdés fontosságát növeli, hogy az önkéntes nyugdíjpénztári életjáradékokra vonatkozó új szabályozás (*Magyar Közlöny* [2015b]), illetve a fejlett országok biztosítási piacaihoz való folyamatos felzárkózás eredményeképpen remélhetőleg a piac jelentős bővülése várható a jövőben.

Irodalom

ÁGOSTON K. CS. – KOVÁCS E. [2000]: *Halandósági modellek*. Aktuárius jegyzetek. 3. köt. Budapesti Corvinus Egyetem. Budapest. http://www.uni-corvinus.hu/fileadmin/user_upload/hu/tanszekek/kozgazdasagtudomanyi/tsz-opkut/files/opkut/files/halandosagi_modellek.pdf

ASTERIOU, D. – HALL, S. G. [2015]: *Applied Econometrics.* 3rd Edition. Palgrave MacMillan. London.

BANYÁR J. [2003]: *Életbiztosítás*. Aula Kiadó. Budapest.

BANYÁR J. [2012]: *A kötelező öregségi életjáradékok lehetséges modelljei*. Társadalombiztosítási könyvtár. Gondolat Kiadó. Budapest.

BENJAMIN, B. – POLLARD, J. H. [1993]: *The Analysis of Mortality and other Actuarial Statistics.* 3rd Edition. Institute and Faculty of Actuaries. Oxford.

BOOTH, H. – HYNDMAN, R. J. – TICKLE, L. – DE JONG, P. [2006]: Lee–Carter mortality forecasting: A multi-country comparison of variants and extensions. *Demographic Research*. Vol. 15. No. 9. pp. 289–310. http://dx.doi.org/10.4054/demres.2006.15.9

BOOTH, H. – MAINDONALD, J. – SMITH, L. [2002]: Applying Lee–Carter under conditions of variable mortality decline. *Population Studies*. Vol. 56. No. 3. pp. 325–336. http://dx.doi.org/10.1080/00324720215935

BOOTH, H. – TICKLE, L. [2008]: *Mortality Modelling and Forecasting: A Review of Methods*. Working Paper. No. 3. Australian Demographic & Social Research Institute. Canberra. http://demography.anu.edu.au/sites/default/files/publications/adsri-papers/ADSRIwp-03.pdf

BROUHNS, N. – DENUIT, M. – VERMUNT, J. K. [2002]: A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables. *Insurance: Mathematics and Economics*. Vol. 31. Issue 3. pp. 373–393. http://dx.doi.org/10.1016/S0167-6687(02)00185-3

BROUHNS, N. – DENUIT, M. – VAN KEILEGOM, I. [2005]: Bootstrapping the Poisson log-bilinear model for mortality forecasting. *Scandinavian Actuarial Journal*. Vol. 2005. Issue 3. pp. 212–224. http://dx.doi.org/10.1080/03461230510009754

CAIRNS, A. J. G. – BLAKE, D. – DOWD, K. – COUGHLAN, G. D. – EPSTEIN, D. – ONG, A. – BALEVICH, I. [2009]: A quantitative comparison of stochastic mortality models using data from England and Wales and the United States. *North American Actuarial Journal*. Vol. 13. Issue 1. pp. 1–35. http://dx.doi.org/10.1080/10920277.2009.10597538

CARNES, B. A. – OLSHANSKY, S. J. [2007]: A realist view of aging, mortality, and future longevity. *Population and Development Review*. Vol. 33. Issue 2. pp. 367–381. http://dx.doi.org/10.1111/j.1728-4457.2007.00172.x

CARSTENSEN, B. [2007]: Age–period–cohort models for the Lexis diagram. *Statistics in Medicine*. Vol. 26. Issue 15. pp. 3018–3045. http://dx.doi.org/10.1002/sim.2764

CURRIE, I. [2016]: On fitting generalized linear and non-linear models of mortality. *Scandinavian Actuarial Journal*. Vol. 2016. Issue 4. pp. 356–383. http://dx.doi.org/10.1080/03461238.2014.928230

DEATON, A. – PAXSON, C. [2001]: *Mortality, Income, and Income Inequality Over Time in Britain and the United States*. Working Paper. No. 8534. National Bureau of Economic Research. Cambridge. http://dx.doi.org/10.3386/w8534

EFRON, B. [1979]: Bootstrap methods: Another look at the jackknife. *The Annals of Statistics*. Vol. 7. No. 1. pp. 1–26. http://dx.doi.org/10.1214/aos/1176344552

GRAY R. – KOVÁCS E. [2001]: Az általánosított lineáris modell és biztosítási alkalmazásai. *Statisztikai Szemle*. 79. évf. 8. sz. 689–702. old.

HABERMAN, S. – RENSHAW, A. [2011]: A comparative study of parametric mortality projection models. *Insurance: Mathematics and Economics*. Vol. 48. Issue 1. pp. 35–55. http://dx.doi.org/10.1016/j.insmatheco.2010.09.003

HOBCRAFT, J. – MENKEN, J. – PRESTON, S. [1982]: Age, period, and cohort effects in demography: A review. *Population Index*. Vol. 48. No. 1. pp. 4–43. http://dx.doi.org/10.2307/2736356

HUNT, A. – BLAKE, D. [2014]: A general procedure for constructing mortality models. *North American Actuarial Journal*. Vol. 18. Issue 1. pp. 116–138. http://dx.doi.org/10.1080/10920277.2013.852963

HUNT, A. – VILLEGAS, A. [2015]: Robustness and convergence in the Lee–Carter model with cohort effects. *Insurance: Mathematics and Economics*. Vol. 64. pp. 186–202. http://dx.doi.org/10.1016/j.insmatheco.2015.05.004

KEILMAN, N. [1998]: How accurate are the United Nations World population projections? *Population and Development Review*. Vol. 24. pp. 15–41. http://dx.doi.org/10.2307/2808049

KEILMAN, N. [2008]: European demographic forecasts have not become more accurate over the past 25 years. *Population and Development Review*. Vol. 34. Issue 1. pp. 137–153. http://dx.doi.org/10.1111/j.1728-4457.2008.00209.x

KOISSI, M. – SHAPIRO, A. – HOGNAS, G. [2006]: Evaluating and extending the Lee–Carter model for mortality forecasting: Bootstrap confidence interval. *Insurance: Mathematics and Economics*. Vol. 38. Issue 1. pp 1–20. http://dx.doi.org/10.1016/j.insmatheco.2005.06.008

KOVÁCS E. [2011]: *Pénzügyi adatok statisztikai elemzése.* IV. bővített kiadás. Tanszék Kft. Budapest.

LEE, R. D. – CARTER, L. R. [1992]: Modeling and forecasting U.S. mortality. *Journal of the American Statistical Association*. Vol. 87. No. 419. pp 659–671. http://dx.doi.org/10.2307/2290201

LEE, R. – MILLER, T. [2001]: Evaluating the performance of the Lee–Carter method for forecasting mortality. *Demography*. Vol. 38. Issue 4. pp. 537–549. http://dx.doi.org/10.1353/dem.2001.0036

LOVÁSZ, E. [2011]: Analysis of Finnish and Swedish mortality data with stochastic mortality models. *European Actuarial Journal*. Vol. 1. Issue 2. pp. 259–289. http://dx.doi.org/ 10.1007/s13385-011-0039-8

MABISZ (MAGYAR BIZTOSÍTÓK SZÖVETSÉGE) [2015]: *Magyar Biztosítók Évkönyve 2015*. http://www.mabisz.hu/images/stories/docs/publikaciok/evkonyv-2015-magyar.pdf

MAGYAR KÖZLÖNY [2015a]: A Magyar Nemzeti Bank elnökének 54/2015. (XII. 21.) MNB rendelete a technikai kamatláb maximális mértékéről. 200. sz. 26528. old. http://www.kozlonyok.hu /nkonline/MKPDF/hiteles/MK15200.pdf

MAGYAR KÖZLÖNY [2015b]: 2015. évi CCXV. törvény a pénzügyi közvetítőrendszer egyes szereplőit érintő törvények jogharmonizációs célú módosításáról. 201. sz. 26601–26649. old. http://www.kozlonyok.hu/nkonline/MKPDF/hiteles/MK15201.pdf

MÁJER I. – KOVÁCS E. [2011]: Élettartam-kockázat – a nyugdíjrendszerre nehezedő egyik teher. *Statisztikai Szemle*. 89. évf. 7–8. sz. 790–812. old.

MCCULLAGH, P. – NELDER, J. [1989]: *Generalized Linear Models.* 2nd Edition. Chapman & Hall. London.

OFFICIAL JOURNAL OF THE EUROPEAN UNION [2004]: Council Directive 2004/113/EC of 13 December 2004 implementing the principle of equal treatment between men and women in the access to and supply of goods and services. 21.12.2004. L373 http://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/PDF/?uri=CELEX:32004L0113&from=EN

OFFICIAL JOURNAL OF THE EUROPEAN UNION [2009]: Directive 2009/138/EC of the European Parliament and of the Council of 25 November 2009 on the taking-up and pursuit of the business of Insurance and Reinsurance. 17.12.2009. L335 http://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/?uri=uriserv:OJ.L_.2009.335.01.0001.01.ENG&toc=OJ:L:2009:335:TOC

PLAT, R. [2009]: On stochastic mortality modeling. *Insurance: Mathematics and Economics*. Vol. 45. Issue 3. pp. 393–404. http://dx.doi.org/10.1016/j.insmatheco.2009.08.006

RENSHAW, A. – HABERMAN, S. [2006]: A cohort-based extension to the Lee–Carter model for mortality reduction factors. *Insurance: Mathematics and Economics*. Vol. 38. Issue 3. pp. 556–570. http://dx.doi.org/10.1016/j.insmatheco.2005.12.001

VILLEGAS, A. M. – KAISHEV, V. – MILLOSSOVICH, P. [2016]: *StMoMo: An R package for stochastic mortality modelling.* SSRN. New York. 13.11.2016. http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2698729

WONG-FUPUY, C. – HABERMAN, S. [2004]: Projecting mortality trends: Recent developments in the U.S. and U.K. *North American Actuarial Journal*. Vol. 8. Issue 2. pp. 56–83. http://dx.doi.org/10.1080/10920277.2004.10596137

Summary

The popularity of mortality forecasting techniques and their new unifying paradigm of the GAPC (generalized age-period-cohort) model has increased significantly in recent years. The paper

first introduces the GAPC family of models and its several notable members, then proceeds by fitting five popular models to mortality data of Hungarian people aged at least 65 years for the 1975–2014 period. It argues that the Cairns–Blake–Dowd-model, which was proposed for modelling old-age mortality, has the best performance based on the criterion of out-of-sample forecasting accuracy. Following *Májer–Kovács* [2011], the author uses forecasted mortality rates to estimate the life expectancy at retirement and the net premium of a pension annuity. He argues that the recent legislation changes in Hungary concerning voluntary pension funds increase the relevance of mortality forecasting in general and the results of the paper in particular. The paper places a strong emphasis on the adequate modelling of parameter uncertainty and concludes that the importance of longevity risk has increased significantly over the past decade. It provides useful insights into mortality forecasting and longevity risk for researchers, statisticians, social security professionals and practising actuaries alike.